

اجتماع و اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

به نام خدا

سلام، دوستای عزیزم این جلسه میفویایم اجتماع و اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها رو یاد بگیریم.

اول میریم سراغ "اشتراک":

یه لحظه اصلا به مجموعه‌ها فکر نکنید.

فرض کنید شما یه کیسه فوراکی دارید که این چیزا دافلشه: یه شکلات، یه آبنمیه، یه بیسکوئیت و یه لواشک.

دوستتون هم یه کیسه داره که اینا دافلشه: یه کیک، یه شکلات، یه چوب‌شور و یه آبنمیه

حالا میفویایم درباره مفهوم اشتراک با هم حرف بزنیم، اشتراک کیسه شما و کیسه دوستتون اون چیزاییه که هم شما توی کیسه تون دارید و هم دوستتون. چیا میشه؟

شما شکلات دارید، آیا دوستتونم داره؟ بله. پس شکلات توی اشتراک هست.

شما آبنمیه دارید، آیا دوستتونم داره؟ بله. پس آبنمیه توی اشتراک هست.

شما بیسکوئیت دارید، آیا دوستتونم داره؟ نه! پس بیسکوئیت توی اشتراک نیست.

شما لواشک دارید، آیا دوستتونم داره؟ نه! پس لواشک توی اشتراک نیست.

خب پس چیا بود که هم شما داشتید هم دوستتون؟ شکلات و آبنمیه.

در اینجا شکلات و آبنمیه همیشه اشتراک کیسه شما و دوستتون.

حالا میفوییم توی دو تا مجموعه، اشتراک رو بررسی کنیم.

دو تا مجموعه A و B رو بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \{ a , b , c , d , e \}$$

$$B = \{ d , e , f , g , h \}$$

میفوییم اشتراک این دو مجموعه رو بنویسیم.

طبق توضیحات قبلی یاد گرفتیم که وقتی میفوییم اشتراک رو بنویسیم باید دنبال چیزایی باشیم که توی هر دو تا مجموعه وجود داره، اعضای مجموعه A رو نگاه می‌کنیم، کدوما توی B هم وجود دارن؟

a نیست ، b نیست ، c نیست ، d هست ، e هم هست. پس اشتراک این دو تا مجموعه همیشه

ما برعکس این کار رو هم میتونیم انجام بدیم، یعنی مجموعه B رو نگاه کنیم و ببینیم کدوم عضواش توی A هم هست، نتیجه همون قبلی میشه.

اعضای مجموعه B رو نگاه می‌کنیم، کدوما توی A هم وجود دارن؟

d هست، e هست، f نیست، g نیست، h نیست. پس اشتراک دو تا مجموعه همیشه

$$\{ d , e \}$$

علامتی که برای نشون دادن اشتراک ازش استفاده می‌کنیم اینه: \cap ، به این صورت می‌نویسیم :

$$A \cap B = \{ d , e \}$$

حالاً که مفهوم اشتراک رو یاد گرفتیم، تعریفش رو بصورت رسمی می‌نویسیم:

اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A و B ، مجموعه‌ای شامل همه عضوهایی

است که هم عضو مجموعه A و هم مجموعه B است. این مجموعه را با نماد

$A \cap B$ نشان می‌دهیم.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

این تعریف ریاضی هم که نوشتیم دقیقاً همونیه که قبلاً یاد گرفتیم، میگه ما x هایی رو

انتخاب می‌کنیم که هم عضو مجموعه A باشن و هم عضو مجموعه B .

یه مثال حل کنیم با همدیگه:

دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و $A \cap B$ را به دست آورید.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leq x \leq 6\}$$

اول میایم عضوای هر مجموعه رو می‌نویسیم، مجموعه A عضوهایش چیا میشه؟

اعدادی که عضو مجموعه اعداد طبیعی هستن و کوچکتر یا مساوی ۶ هستن. پس داریم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

عضوای مجموعه B چیا میشن؟

اعدادی که متعلق به اعداد صحیح هستن و بزرگتر مساوی ۳ و کوچکتر مساوی ۶ هستن.

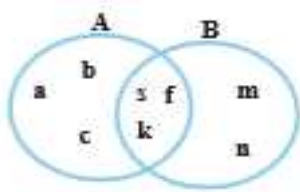
پس داریم:

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

حالا عضوهایی که هم در A و هم در B هستن رو می نویسیم:

$$A \cap B = \{ ۳, ۴, ۵, ۶ \}$$

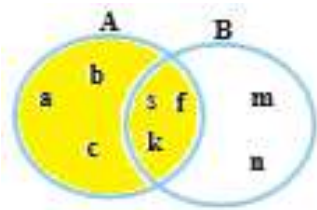
اگه یادتون باشه گفتیم که یکی از راههای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمودار ون هست. حالا می‌فوییم ببینیم توی این حالت، اشتراک پطوری مشخص میشه.



شکل زیر رو در نظر بگیرید:

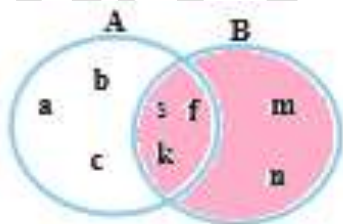
ما مجموعه های A و B رو با نمودار ون نشون دادیم. اگه بفوییم مجموعه A رو روی

شکل نشون بدیم داریم:



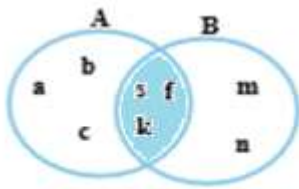
یعنی همه اینا که تو قسمت زرد هستن عضو مجموعه A هستن. حالا می‌فوییم مجموعه B

رو نشون بدیم:



طبق تعریفی که برای اشتراک گفتیم، اگه بفوییم اشتراک این دو تا مجموعه رو مشخص کنیم باید دنبال عضوهایی باشیم که هم توی مجموعه A هستن و هم توی مجموعه B .

با دقت نگاه کنید، کدام قسمت از شکل هم متعلق به مجموعه A هست هم متعلق به مجموعه B؟ کاملاً درست گفتید، شکل زیر اشتراک این دو مجموعه است:



پس این قسمتی که با رنگ آبی مشخص شده نشوندهنده اشتراک A و B می‌شه. آگه بخوایم به صورت مجموعه بنویسیم داریم:

$$A \cap B = \{s, k, f\}$$



حالا می‌ریم سراغ مفهوم اجتماع!

اول جلسه یه مثال گفتیم، یه بار دیگه صورتش رو ببینید:

فرض کنید شما یه کیسه خوراکی دارید که این چیزا داخلشه: یه شکلات، یه آبمیوه، یه بیسکویت و یه لواشک. دوستتون هم یه کیسه داره که اینا داخلشه: یه کیک، یه شکلات، یه پوب شور و یه آبمیوه

وقتی می‌خوایم اجتماع رو بنویسیم، همه چیزایی که هست رو لازم داریم، توی این مثال هر چیزی که توی کیسه شما و هر چیزی که توی کیسه دوستتون هست جزو اجتماع به حساب میاد.

به زبون ساده، هر وقت اسم اجتماع او مد ما هرررر پی که توی مجموعه هامون داریم می نویسیم. فقط یه شرط داره، اونایی که تکرارین فقط یه بار می نویسیم.

مثلا میفوییم اجتماع این دو تا کیسه رو بنویسیم. اول همه رو می نویسیم:

شکلات، آبنمیه، بیسکوئیت، لواشک، کیک، شکلات، پوب شور، آبنمیه

حالا باید طبق شرطی که گذاشتیم تکرار یا رو فقط یه بار بنویسیم. تکرار یا مون کدومان؟ آبنمیه، شکلات. حالا پیزی که داریم این میشه:

شکلات، آبنمیه، بیسکوئیت، لواشک، کیک، پوب شور

این همیشه اجتماع اون دو تا کیسه. دیدید بقدر راحت بود.

پس برای مناسبه اجتماع دو تا مجموعه دو تا کار زیر رو انجام میدیم:

۱. همه عنوهای دو تا مجموعه رو می نویسیم.

۲. اونایی که تکرار شدن، فقط یکیش رو می نویسیم.

علامتی که برای نشون دادن اجتماع ازش استفاده می کنیم این علامته: **U**

دو تا مجموعه A و B رو بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \{ a, b, c, d, e \}$$

$$B = \{ d, e, f, g, h \}$$

میفوییم اجتماع این دو مجموعه رو بنویسیم:

گام ۱: همه عضوهای دو مجموعه رو می نویسیم:

$$\{a, b, c, d, e, d, e, f, g, h\}$$

گام ۲: عضوهای تکراری رو مشخص می کنیم و فقط یکیشون رو نگه میداریم. الان اینجا دو تا d داریم و دو تا e. پس از هر کدوم فقط یکی رو نگه میداریم. نتیجه این میشه:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

حالا که مفهوم اجتماع رو یاد گرفتیم، تعریف رسمی اون رو هم می نویسیم:

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B، مجموعه ایست شامل همه عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند. این مجموعه را با نماد $A \cup B$ ، نشان میدهیم.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

پس در واقع عضوهای اجتماع، اونایی هستن که یا متعلق به A هستند یا متعلق به B هستند یا توی هر دو تا مجموعه A و B وجود دارن.

دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید، $A \cup B$ را بنویسید.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leq x \leq 6\}$$

در قسمت قبل عضوهای این دو تا مجموعه رو مشخص کردیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{ ۳, ۴, ۵, ۶ \}$$

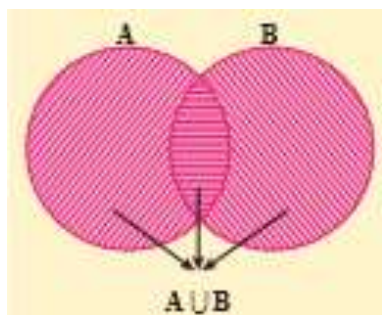
گام ۱. همه عضوایی که توی دو تا مجموعه وجود داره می نویسیم:

$$\{ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۳, ۴, ۵, ۶ \}$$

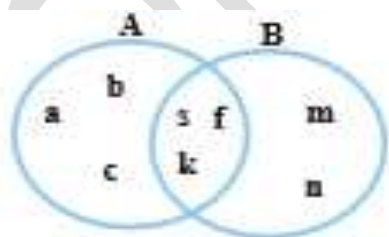
گام ۲. از بین اون که تکرار شدن فقط یکیشون رو نگه میداریم، پیا تکرارین؟ ۳، ۴، ۵، ۶
پس داریم:

$$A \cup B = \{ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ \}$$

اگه بخوایم اجتماع دو مجموعه رو با نمودار ون نشون بدیم به صورت زیر میشه:



با توجه به شکل زیر اجتماع دو مجموعه A و B را بنویسید:



طبق شکلی که بالا نشون دادیم، $A \cup B$ میشه همه عضوهایی که توی A و B هستن، یعنی:

$$A \cup B = \{ a, b, c, s, f, k, n, m \}$$

تفاضل مجموعه‌ها

مطلب دیگه‌ای که می‌فوییم در موردش صحبت کنیم "تفاضل دو مجموعه" هست.

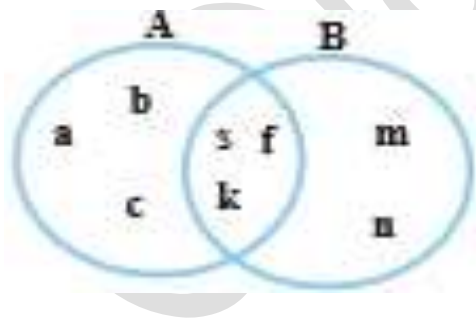
وقتی می‌گیم $A-B$ ، منظورمون پیه؟

منظور اینه که ما عضوهای A رو می‌فوییم که B اونا رو نداشته باشه!

ممکنه الان یه کم براتون نامفهوم باشه ولی نگران نباشید الان با هم قدم به قدم جلو میریم تا یاد بگیرید 😊.

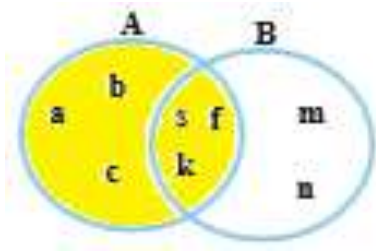
دو تا مجموعه A و B رو در نظر بگیرید:

$A-B$ اینطوریه که A به B می‌گه من عضوهای A رو می‌فوام که فقط مخصوص به خودم باشه، اگه عضوایی که من دارم رو تو هم داشته باشی، من اونا رو نمی‌فوام.



بریم روی شکل بینیم A چی می‌گه! اعضای $A-B$ کدوماس؟

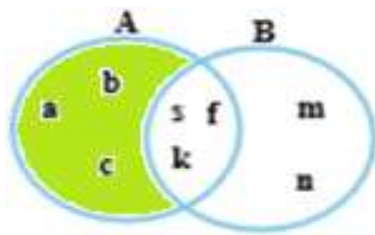
روی شکل عضوای A رو نشون میدیم:



الان اگه بفوایم $A-B$ رو نشون بدیم، میریم سراغ حرفی که A زد.

A به B گفت "من عضوهایی رو میفوام که فقط مال خودم باشه"، به نظرتون A کدوم عضوای خودش رو نمیفواد؟

آخرین! اونایی که B هم اونا رو داره. پس A میگه من s, f, k رو نمیفوام چون B هم اونا رو داره 😞، پس پیا برای A میمونه؟ a, b, c

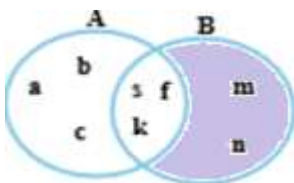


بنابراین داریم:

$$A - B = \{a, b, c\}$$

حالا میتونید بگیر $B - A$ چی میشه؟

اینجا B تصمیم میگیره و میگه عضوهایی که توی A باشه من نمیفوام. پس B هم s, f, k رو نمیفواد 😞. پس عضوای زیر براش باقی میمونه:



$$B - A = \{m, n\}$$

پس داریم:

تا اینجا از روی شکل یاد گرفتیم که $A - B$ و $B - A$ رو بنویسیم ولی همیشه که مجموعه ها بصورت نمودار ون نمایش داده نمیشن!

در این قسمت میفوییم یه روش ساده یاد بگیریم که آگه مجموعه ها رو با عضواش نشون داده بودن، بتونیم به راحتی تفاضلشون رو پیدا کنیم.

فرض کنید دو تا مجموعه زیر رو به ما دادن:

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$B = \{a, e, g, k, l\}$$

از ما میفوان که $A - B$ رو به دست بیاریم، گام به گام بصورت زیر عمل می کنیم:

۱. اعضای مجموعه اول رو توی یه سطر می نویسیم و اعضای مجموعه دو^م رو توی یه سطر پایین تر.

در اینجا مجموعه ی A اول نوشته شده، پس عضوهای A رو در سطر اول می نویسیم و عضوهای B رو در سطر دو^م

a, b, c, d, e, f, g, h

a, e, g, k, l

۲. عضوهایی که توی هر دو سطر مشترک هستن رو خط میزنیم:

~~a, b, c, d, e, f, g, h~~

~~a, e, g, k, l~~

۳. جواب نهایی ما میشه هر چیزی که در سطر اول باقی مونده. (توجه کنید ما به

پیزیایی که در سطر دو^م باقی می مونه هیچ کاری نداریم)

$$A - B = \{b, c, d, f, h\}$$

دیدید مقدار راحت بود 😊

حالا فرض کنید که برای همین سوال می‌خواهیم $B - A$ رو به دست بیاریم.

گام به گام پیش میریم:

۱. اعضای مجموعه اول رو توی یه سطر می‌نویسیم و اعضای مجموعه دوم رو توی یه سطر پایین‌تر.

در اینجا مجموعه‌ی B اول نوشته شده، پس عضوهای B رو در سطر اول می‌نویسیم و عضوهای A رو در سطر دوم

a, e, g, k, l

a, b, c, d, e, f, g, h

۲. عضوهایی که توی هر دو سطر مشترک هستن رو خط می‌زنیم:

~~a, e, g, k, l~~

~~a, b, c, d, e, f, g, h~~

۳. جواب نهایی ما همیشه هر چیزی که در سطر اول باقی مونده. (توجه کنید ما به

پیزیایی که در سطر دوم باقی می‌مونه هیچ کاری نداریم)

$$B - A = \{k, l\}$$

حل تمرین صفحه ۱۴
اجتماع-اشتراک-تفاضل

۱- مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ و $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$ و $C = \{1, 7, 10, 11\}$ را در نظر بگیرید؛ سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

- | | | | |
|-----------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|
| الف) $A \cup B$ | ب) $B \cup C$ | ج) $A \cup C$ | د) $A \cap B$ |
| هـ) $A - B$ | و) $C - B$ | ز) $(A - C) \cup (B - C)$ | ح) $(A \cup B) - C$ |
| ط) $A \cap A$ | ی) $A \cap \emptyset$ | ک) $B \cup B$ | ل) $C \cup \emptyset$ |

الف:

همه عضوهایی که در مجموعه A و B هستند می‌نویسیم، عضوهای تکراری فقط یکبار نوشته می‌شوند:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ب:

همه عضوهایی که در مجموعه B و C هستند می‌نویسیم، عضوهای تکراری فقط یکبار نوشته می‌شوند:

$$B \cup C = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11\}$$

ج:

همه عضوهایی که در مجموعه A و C هستند می نویسیم، عضوهای تکراری فقط یکبار نوشته میشن:

$$A \cup C = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

د:

عضوهایی که بین دو مجموعه A و B مشترک هستند رو می نویسیم، تنها عضو مشترک این دو مجموعه عدد ۲ هست:

$$A \cap B = \{9\}$$

ه:

برای به دست آوردن تفاضل دو مجموعه:

گام اول: مجموعه ای که اول اومده رو بالا می نویسیم و مجموعه ای که دوم اومده پایین، در اینجا مجموعه A اول اومده، بنابراین:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$$

$$B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$$

گام دوم: هر عضوی که بین دو مجموعه مشترک هست رو خط می زنیم:

$$A = \{2, 4, 6, 8, \cancel{9}\}$$

$$B = \{1, 5, 7, 3, \cancel{9}\}$$

گام سوم: هر چیزی که از مجموعه اول باقی مانده همیشه جواب ما. توجه داشته باشید که ما دیگر کاری با مجموعه دوم نداریم. فقط عضوهایی که از مجموعه اول باقی مانده برای ما اهمیت دارد:

$$A - B = \{2, 4, 6, 8\}$$

و:

گام اول: مجموعه‌ای که اول آورده رو بالا می‌نویسیم و مجموعه‌ای که دوم آورده پایین:

$$C = \{1, 7, 10, 11\}$$

$$B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$$

گام دوم: هر عضوی که بین دو مجموعه مشترک هست رو خط می‌زنیم:

$$C = \{\cancel{1}, \cancel{7}, 10, 11\}$$

$$B = \{\cancel{1}, 5, \cancel{7}, 3, 9\}$$

گام سوم: هر چیزی که از مجموعه اول باقی مانده همیشه جواب ما.

$$C - B = \{10, 11\}$$

ز:

طبق روشی که در دو قسمت قبل استفاده کردیم، $A - C$ و $B - C$ رو می‌نویسیم:

$$A - C = \{2, 4, 6, 8, 9\}$$

$$B - C = \{5, 3, 9\}$$

حالا اجتماع این دو مجموعه رو به دست میاریم:

$$(A - C) \cup (B - C) = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

ح:

در قسمت الف $A \cup B$ رو مناسبه کردیم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

طبق روشی که در قسمت‌های ه و و دیدیم، این مجموعه رو بالا می‌نویسیم و مجموعه C رو پایین:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{1, 7, 10, 11\}$$

عظوهای مشترک بین دو مجموعه رو خط می‌زنیم:

$$A \cup B = \{\cancel{1}, 2, 3, 4, 5, 6, \cancel{7}, 8, 9\}$$

$$C = \{\cancel{1}, \cancel{7}, 10, 11\}$$

حالا هر چی که از مجموعه اول باقی مونده میشه جواب:

$$A \cup B - C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

ط:

اجتماع هر مجموعه با خودش برابر همون مجموعه میشه، بنابراین:

$$A \cap A = A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$$

ی:

اشتراک هر مجموعه با تهی، برابر تهی میشه:

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

ک:

اجتماع هر مجموعه با خودش، برابر همون مجموعه میشه. بنابراین:

$$B \cup B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$$

ل:

اجتماع هر مجموعه با تهی، برابر خود مجموعه همیشه. بنابراین:

$$C \cup \emptyset = C = \{1, 7, 10, 11\}$$

ادامه تمرینها رو می تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺
در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam9

برای دریافت جزوات سایر پایه ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.